Université Paris Dauphine
2025-2026

Introduction aux séries temporelles
TD5 - Projection linéaire

Exercice 1 Soit X un processus stationnaire de moyenne $\mu \in \mathbb{R}$. On pose $Y_t = X_t - \mu$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{proj}(X_t, \text{Vect}\{1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\}) = \mu + \text{proj}(Y_t, \text{Vect}\{Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}\}).$$

Exercice 2 On considère l'équation AR(2) suivante :

$$X_t = Z_t + \frac{3}{4}X_{t-1} - \frac{1}{8}X_{t-2} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution stationnaire X à cette équation, qui est causale et inversible.
2. Déterminer le prédicteur progressif d'ordre p de X, pour tout $p \geq 1$.

Exercice 3 On considère l'équation ARMA(2,1) suivante :

$$X_t = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1} + X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que cette équation possède une unique solution stationnaire X.
2. Montrer que X est solution d'une équation AR(1) que l'on explicitera.
3. Déterminer le prédicteur progressif d'ordre p de X, pour tout $p \geq 1$.

Exercice 4 Soit (X_t) un processus stationnaire centré et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\widehat{X}_{t,h} = \text{proj}(X_t, \text{Vect}\{X_{t-h}, \dots, X_{t-h-p+1}\}).$$

1. Déterminer l'équation satisfaite par les coefficients $\theta_1, \dots, \theta_p$ tels que $\widehat{X}_{t,h} = \sum_{k=1}^{p} \theta_k X_{t-h-k+1}$.
2. Montrer que $\|X_t - \widehat{X}_{t,h}\|_2$ ne dépend pas de t.
3. On suppose que (X_t) est décorrélé à l'infini (i.e., $\gamma_X(h) \to 0$ lorsque $h \to +\infty$). Montrer que $(\widehat{X}_{t,h})$ tend vers 0 dans L^2 lorsque $h \to +\infty$.

Exercice 5 (Processus déterministe) On dit qu'un processus stationnaire centré X est déterministe si

$$X_t \in \overline{\text{Vect}\{X_s,\ s < t\}} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n^2 = \text{Var}(X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,n}))$ où $H_{t-1,n} = \text{Vect}(X_{t-k},\ k \in \{1, \dots, n\})$. On pose $\sigma_\infty := \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ (cette limite existe car (σ_n) est décroissante).

1. Montrer que X est déterministe si et seulement si $\sigma_\infty = 0$.
2. Donner un exemple de processus déterministe et un exemple de processus non déterministe.

3. Les processus AR(p) sont-ils déterministes ?

Exercice 6 On considère l'équation ARMA(p,q) générale

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t-k} + \sum_{k=1}^{q} b_k Z_{t-k}$$

On suppose que les polynômes $A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^k$ et $B(z) = 1 + \sum_{k=1}^{q} b_k z^k$ n'ont pas de racine à l'intérieur du disque unité.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$ dans ℓ^1 tels que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k Z_{t-k} \text{ et } Z_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k X_{t-k}$$

2. Pour $n \in \mathbb{Z}$ fixé, on pose $H_n^X = \overline{\mathrm{Vect}\{X_k,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \leq n\}}$. Montrer que

$$H_n^X = \overline{\mathrm{Vect}\{Z_k,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \leq n\}}.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\hat{X}_t = \mathrm{proj}(X_t, H_n^X)$. Montrer que, pour tout $t \geq 1$, on a

$$\hat{X}_{t+n} = -\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \hat{X}_{t+n-j} = \sum_{j=t}^{\infty} \beta_j Z_{t+n-j}$$

et

$$\mathrm{var}(X_{t+n} - \hat{X}_{t+n}) = \sum_{j=0}^{t-1} \beta_j^2.$$

4. Calculer $\hat{X}_{n+1}$ dans le cas particulier AR(1) et MA(q).